

I teoremi del calcolo differenziale

Nel precedente capitolo abbiamo parlato di un gran numero di aspetti riguardanti la derivata prima (e la derivata seconda). Adesso ci occuperemo invece di definire altri aspetti mediante alcuni teoremi riguardanti il calcolo differenziale.

Per esaminare tali teoremi, dobbiamo anzitutto conoscere bene i significati di massimizzazione di una funzione, di punto di massimo e punto di minimo e di superiore e di inferiore di una funzione.

Consideriamo una funzione $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$:

- si dice massimo della funzione il più grande dei valori che essa assume.
- si dice minimo della funzione il più piccolo dei valori che essa assume.

Ad esempio, se abbiamo la funzione $f(x) = x^2 - 3$, il suo minimo è $f(x_0) = -3$.

Invece:

- si dice che $x_0 \in D_f$ è punto di massimo locale o relativo per la funzione f se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_{x_0} \cap D_f$$

per $x \neq x_0$ si ha: $f(x) < f(x_0)$

- si dice che $x_0 \in D_f$ è punto di minimo locale o relativo per la funzione f se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I_{x_0} \cap D_f$$

per $x \neq x_0$ si ha: $f(x) > f(x_0)$

Per la funzione precedente, $f(x) = x^2 - 3$, il minimo relativo (che è anche minimo assoluto di tutta la funzione - non è solo relativo in I_{x_0}) è relativo proprio a $x = 0$. Esso è il valore di x in corrispondenza del quale la funzione assume il suo valore minimo.

Ricordiamo che il massimo assoluto della funzione (che è tale se $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D_f$) è anche massimo locale; il minimo assoluto

scelte di una funzione (che è tale se $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in D_f$) è anche minimo locale. Invece non sono sempre veri i converse.

Si chiamano rispettivamente estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione e vengono indicati rispettivamente con $\sup f$ e $\inf f$ l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione. Se la funzione è limitata superiormente, il suo estremo superiore è il massimo della funzione ($\forall x \in D_f, f(x) \leq K$), se la funzione è limitata inferiormente, il suo estremo inferiore è il minimo della funzione ($\forall x \in D_f, f(x) \geq K$). Nel caso della funzione $f(x) = x^2 - 3$, essa ha $\inf f = \min f = -3$ (infatti $\forall x \in D_f, f(x) \geq -3$) per il punto di minimo $x_0 = 0$; inoltre ha $\sup f = +\infty$ (è illimitata superiormente).

Invece la funzione $f(x) = -x^2 + 3$ ha $\sup f = \max f = +3$ (infatti $\forall x \in D_f, f(x) \leq +3$) per il punto di massimo $x_0 = 0$; inoltre ha $\inf f = -\infty$ (è illimitata inferiormente).

Per analizzare i teoremi del calcolo differenziale dobbiamo anche conoscere il teorema di Weierstrass, che ci limitiamo ad enunciare: "Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ è dotata di massimo e di minimo".

Un teorema introduttivo: il lemma di Fermat

"Nei punti di massimo o minimo locali di una funzione derivabile interni al dominio la derivata vale zero".

Questo teorema era già stato intuitivamente utilizzato quando abbiamo osservato la derivata prima come indice di crescita di una funzione.

Dimostrazione

Consideriamo il punto x_0 di massimo locale appartenente al D_f di $f(x)$: esso ha un intorno I_{x_0} totalmente contenuto in D_f . Essendo x_0 punto di massimo si ha:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_{x_0} \cap D_f$$

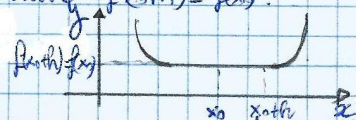
Prendiamo $h \neq 0$ in modo che $x+h \in I_{x_0}$. Scriviamo i rapporti incrementali destro e sinistro della funzione relativi a x_0 e ad h (incremento per ora non tendente a zero). Avremo in seguito la derivabilità in x_0 , per ora scriviamo i semplici

rapporti incrementali:

$$RIS = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad (h < 0)$$

$$RID = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad (h > 0)$$

Abbiamo visto $\geq$ e $\leq$ perché il tratto di funzione, se analizzavo potrebbe essere parallelo all'asse x ; perciò si avrebbe $f(x_0+h) = f(x_0)$:



Il numeratore è sempre lo stesso ed è sempre negativo perché $f(x) \geq f(x_0+h)$ per ipotesi iniziale (x_0 è punto di massimo):

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$$

Esso è nullo se $h=0$. Quando $h < 0$, il rapporto è positivo perché dividiamo una quantità negativa per un'altra negativa; quando $h > 0$ il rapporto è negativo perché dividiamo una quantità negativa per una positiva.

Poiché che in x_0 la funzione è derivabile possiamo scrivere i rapporti incrementali precedenti per $h \rightarrow 0$, cioè le derivate prime in x_0 mediante definizione:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$$

Abbiamo sfruttato in questi due ultimi limiti il bisogno della permanenza del segno. Abbiamo osservato che si deve avere contemporaneamente:

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad f'(x_0) \leq 0$$

L'unico modo in cui entrambe le relazioni siano vere contemporaneamente è che $f'(x_0)$ sia pari a zero; perciò:

$$f'(x_0) = 0$$

La dimostrazione svolta sarebbe stata analoga se avessimo considerato un punto di minimo locale. In tal caso avremmo avuto però:

$$f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{ovv}$$

Il teorema appena dimostrato equivale a dire che il coefficiente angolare di una retta tangente ad una funzione in un suo punto di massimo è di minimo è nullo, cioè che la retta è parallela all'asse x .

I tre teoremi che seguono riguardano funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $I = [a; b]$ e derivabili almeno in $]a; b[$.

Il teorema di Rolle

Se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, è derivabile in $]a; b[$ e assume valori uguali agli estremi:
 $f(a) = f(b)$

allora esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo in cui la sua derivata si annulla:

$$f'(x_0) = 0$$

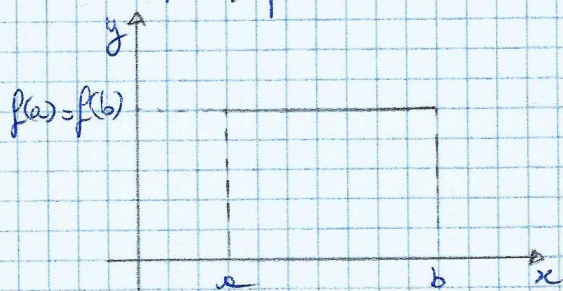
Dimostrazione

Dato che la funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ essa ammette, per il teorema di Weierstrass, un punto di massimo e uno di minimo, nonché un massimo e un minimo. Già questo basterebbe a dimostrare il teorema usando quello precedente, ma analizziamo comunque i due casi in cui esso si presenta:

- Se minimo m e massimo M sono assunti uno ad un estremo e l'altro all'altro dell'intervallo $[a; b]$, si ha $f(a) = m$ e $f(b) = M$ (ad esempio), ma per ipotesi era $f(a) = f(b)$, perciò $m = M$. Il minimo coincide col massimo, perciò $m = M = c$; la funzione, essendo compresa tra a e b , sarà soggetta alla condizione:

$$c \leq f(x) \leq c \quad \text{e cioè} \quad f(x) = c$$

In altre parole la funzione è costante in $[a; b]$. Pertanto la sua derivata è nulla $\forall x \in]a; b[$. Il suo grafico potrebbe essere, ad esempio, quello di una retta:



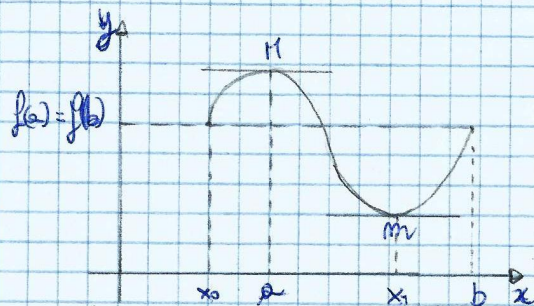
o.d.

- se minimo m o massimo M o entrambi sono assunti da punti interni all'intervallo $[a; b]$, prendiamo il punto x_0 di massimo (o di minimo). Per il lemma di Fermat avremo:
 $f'(x_0) = 0$

o.d.

Il teorema di Rolle ci dice dunque che, nelle condizioni imposte, esiste almeno una tangente alla funzione parallela

sull'asse x :



Per poter passare al teorema di Cauchy dobbiamo fare un'osservazione su quello di Rolle. Raramente si verifica la condizione del teorema di Rolle $f(a)=f(b)$, con a e b estremi dell'intervallo. Possiamo però "creare" tale condizione partendo da due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ combinandole linearmente in un'unica funzione $F(x)$ con i suoi due coefficienti A e B reali e finiti:

$$F(x) = A f(x) + B g(x) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Per ottenere l'uguaglianza:

$$F(a) = F(b)$$

dobbiamo scegliere A e B in modo che:

$$A f(a) + B g(a) = A f(b) + B g(b)$$

ovvero che:

$$A(f(a) - f(b)) = B(g(b) - g(a))$$

Possiamo raggiungere tale obiettivo inserendo:

$$A = g(b) - g(a)$$

e

$$B = f(a) - f(b)$$

Infatti, così facendo:

$$(g(b) - g(a)) \cdot (f(a) - f(b)) = (f(a) - f(b)) \cdot (g(b) - g(a))$$

Sfrutteremo questo aspetto nel prossimo teorema.

Il teorema di Cauchy

Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, derivabili in $]a; b[$ e sia inoltre:

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$$

Esiste allora almeno un punto $x_0 \in]a; b[$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Dimostrazione

La condizione $g'(x_0) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$ implica che, per il teorema di Rolle, $g(b) \neq g(a)$. Se $g(b) = g(a)$ ci sarebbe infatti almeno un punto x_0 tale che $g'(x_0) = 0$.

Sfruttando quanto abbiamo detto prima, ponendo che $f(x)$ e $g(x)$ definiscano $F(x)$:

$$F(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f(x) - [f(b) - f(a)] \cdot g(x)$$

Essendo somme di due funzioni continue in $[a; b]$ e derivabili in $]a; b[$, $F(x)$ è anch'esse continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$. Inoltre, per quanto osservato prima di enunciare il teorema, si ha:

$$F(a) = F(b)$$

Allora $F(x)$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle; di conseguenza esiste almeno un punto x_0 tale che $F'(x_0) = 0$. Pertanto:

$$F'(x_0) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x_0) - [f(b) - f(a)] \cdot g'(x_0) = 0$$

Da cui si ottiene:

$$[g(b) - g(a)] \cdot f'(x_0) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x_0)$$

Dividiamo membro a membro per $[g(b) - g(a)] \cdot g'(x_0) \neq 0$ e otteniamo la tesi del teorema:

$$\frac{[g(b) - g(a)] \cdot f'(x_0)}{[g(b) - g(a)] \cdot g'(x_0)} = \frac{[f(b) - f(a)] \cdot g'(x_0)}{[g(b) - g(a)] \cdot g'(x_0)}$$

Infatti:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ovv.

Il teorema di Lagrange (o del valor medio)

Se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, esiste almeno un punto $x_0 \in]a; b[$ tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione

Per dimostrare questo teorema sfruttiamo quello di Cauchy.

Imponiamo $g(x) = x$; ne segue che:

$$g'(x) = 1$$

$$g(b) = b$$

$$g(a) = a$$

Sostituendo nelle tesi del teorema di Cauchy $\left(\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)$ e otteniamo la tesi di questo teorema:

$$\frac{f'(x_0)}{1} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

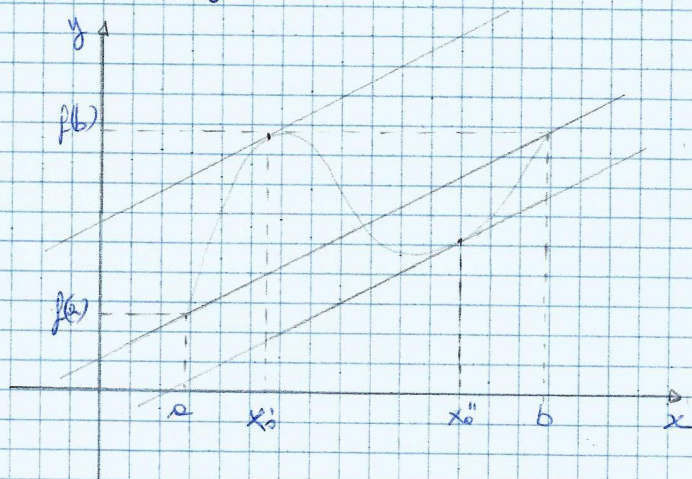
Q.E.D.

Sostituendo $x_2 = b$, $x_1 = a$, $f(b) = f(x_2)$, $f(a) = f(x_1)$ otteniamo un'altra relazione che esprime il teorema di Lagrange:

$$(x_2 - x_1) f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f'(x_0)$$

Notiamo inoltre che la tesi del teorema di Lagrange è l'espressione che permette di calcolare il coefficiente angolare di una retta (e in effetti corrisponde a $f'(x_0)$, una derivata prima). Ma di quale retta stiamo parlando? Di quella che passa per i punti estremi dell'intervallo, essendo a ed $f(a)$ coordinate di A e b ed $f(b)$ coordinate di B? Anche. In effetti in principio stavamo calcolando il coefficiente angolare della retta passante per il punto di coordinate x_0 ed $f(x_0)$ appartenente alla funzione. Tale coefficiente, come abbiamo potuto osservare, è anche quello della retta passante per gli estremi A e B dell'intervallo. Possiamo allora concludere dicendo che il teorema di Lagrange ci assicura che esiste almeno un punto $x_0 \in]a; b[$ tale che la tangente al grafico nel punto $P(x_0, f(x_0))$ sia parallela alla retta congiungente i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.



In alternativa possiamo dimostrare il teorema di Lagrange sfruttando quello di Rolle attraverso una funzione ausiliaria che ne rispetti le condizioni, come la seguente:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x \quad \text{con } f(a) \text{ continua in } [a; b] \text{ e derivabile in }]a; b[$$

Essa rispetta le condizioni del teorema di Rolle:

- $F(x)$ è continua in $[a, b]$ poiché somma di funzioni continue in $[a, b]$ ($f(x)$ per hp e $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times$ poiché è la retta che passa per $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$);

- $F(x)$ è derivabile in $]a, b[$ poiché somma di funzioni derivabili in $]a, b[$ ($f(x)$ per hp e $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times$ poiché è la retta che passa per $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$);

- $F(a) = F(b)$ poiché:

$$F(a) = f(a) - \frac{a f(b) - a f(a)}{b-a} = \frac{b f(a) - a f(a) - a f(b) + a f(a)}{b-a} = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}$$

$$F(b) = f(b) - \frac{b f(b) - b f(a)}{b-a} = \frac{b f(b) - a f(b) - b f(b) + b f(a)}{b-a} = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}$$

$$\text{Infatti } F(a) = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a} = F(b) = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}.$$

Rispettando tutte e tre le condizioni del teorema di Rolle, la funzione gode delle tesi del teorema: $\exists x_0 \in]a, b[/ F'(x_0) = 0$

Calcoliamo allora la derivata prima di $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Poniamo ora uguale a zero, sfruttando la tesi del teorema di Rolle:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Da cui:

$$f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Che è la tesi del teorema di Lagrange.

Esercizi di applicazione dei teoremi studiati

Prima di procedere con l'analisi degli altri teoremi del calcolo differenziale, soffermiamoci su alcuni esercizi (tipici dei "quesiti" del compito dell'Esame di Stato) di applicazione di tali teoremi:

- applicazione del teorema di Rolle: data la funzione $f(x) = ax^3 + (a-1)x$, trova per quale valore di a essa verifica le ipotesi del teorema di Rolle in $[-1; 2]$ e applica al valore di a trovato.

Affinché alla funzione $f(x)$ sia applicabile la tesi del teorema di Rolle, deve rispettare le condizioni; notiamo che:

- $f(x)$ è continua in $[-1; 2]$ poiché somma di funzioni continue (in $\mathbb{R}$ e, di conseguenza, in $[-1; 2]$),
- $f(x)$ è derivabile in $] -1; 2[$. Infatti la derivata prima di $f(x)$ è $f'(x) = 3ax^2 + a - 1$, il cui campo di esistenza che è l'insieme di derivabilità di $f(x)$, è $\mathbb{R}$. Di conseguenza $f(x)$ è derivabile in $] -1; 2[$ (che è sottoinsieme del dominio della derivata prima di $f(x)$);
- affinché $f(x)$ sia applicabile il teorema di Rolle dobbiamo avere $f(-1) = f(2)$. È necessario sostituire la x nella funzione e porre le due espressioni ottenute l'una uguale all'altra per ottenere il valore di a che verifica l'equazione precedente:

$$f(-1) = -a - a + 1 = -2a + 1$$

$$f(2) = 8a + 2a - 2 = 10a - 2$$

$$\text{Poniamo } f(-1) = f(2): -2a + 1 = 10a - 2 \quad \text{da cui: } a = \frac{1}{4}$$

Avendo trovato $a = \frac{1}{4}$, la funzione a cui è applicabile il teorema di Rolle è $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x$. Esiste allora un punto x_0 tale che $f'(x_0) = 0$. Troviamo tale punto x_0 ponendo la derivata prima di $f(x)$ uguale a zero ($x_0 \in] -1; 2[$):

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}$$

Poniamo $f'(x) = 0$:

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm 1$$

Dato che il punto x_0 deve appartenere all'intervallo escluso gli estremi, solo $x = +1$ è accettabile poiché $x = -1$ coincide con un estremo;

- applicazione del teorema di Cauchy: date le funzioni $f(x) = x^3 + 2x - 3$ e $g(x) = x^2 - 4x + 6$, verificare che esse soddisfanno le ipotesi del teo-

remo di Cauchy nell'intervallo $I = [0; 1]$ e trovare il punto x_0 in cui è verificata la tesi del teorema.

Affinché valga il teorema di Cauchy per $f(x)$ e $g(x)$, devono essere verificate le ipotesi del teorema stesso, vale a dire:

- entrambe le funzioni, essendo continue in $\mathbb{R}$, lo sono anche in $[0; 1]$;
- $f'(x) = 2x + 2$ e $g'(x) = 2x - 4$ hanno come dominio $\mathbb{R}$, che rappresenta l'insieme di derivabilità di $f(x)$ e $g(x)$. Pertanto $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $]0; 1[$;
- $g'(x) \neq 0 \forall x \in]0; 1[$, infatti $g'(x)$ è positiva per $x > 2$. Pertanto il punto in cui $g'(x)$ si annulla è $x_0 = 2$, che non appartiene a $]0; 1[$.

Valendo le ipotesi del teorema di Cauchy, ne vale anche la tesi. Calcoliamo allora $f(0)$, $f(1)$, $g(0)$, $g(1)$:

$$f(0) = -3$$

$$f(1) = 0$$

$$g(0) = +6$$

$$g(1) = 3$$

Inserendo tali dati nella tesi del teorema di Cauchy otteniamo:

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{0 + 3}{3 - 6} = -1$$

Essendo tale risultato uguale al rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, possiamo scoprire il valore di x per cui è verificata la tesi del teorema di Cauchy:

$$(x - 2) \cdot (-1) = \frac{2(x + 1)}{2(x - 2)} \quad (x - 2)$$

$$-x + 2 = x + 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Il risultato è valido poiché appartiene a $]0; 1[$;

- applicazione del teorema di Lagrange: proponiamo in questo caso due esercizi. Il primo non soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, il secondo sì.

Stabilire se nell'intervallo a fianco indicato valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e in caso affermativo trovare il punto la cui esistenza è garantita dal teorema:

$$2) f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{per } x < 0 \\ 3x^2 + 2x & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad I = [1; 2]$$

Vediamo se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema in questione in I :

- $f(x)$ deve essere continua in I . La funzione $g(x) = e^x - 1$ è continua in $\mathbb{R}$, in particolare lo è per $x < 0$; la funzione $h(x) = 3x^2 + 2x$ è continua in $\mathbb{R}$, in particolare lo è per $x \geq 0$. Per sapere se $f(x)$ è continua in $x=0$, dobbiamo procedere come di consueto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 2x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = f(0) = 0$, $f(x)$ è continua in $x=0$. Di conseguenza $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ e in $I = [-1, 2]$, otteniamo che $f(x)$

- $f(x)$ deve essere derivabile in $] -1, 2[$. Le funzioni $g'(x) = e^x$ e $h'(x) = 6x + 2$ sono definite in $\mathbb{R}$ e, di conseguenza, negli intervalli imposti dalla funzione $f(x)$. Quest'ultima è allora derivabile "quasi" dappertutto: rimane da verificare che lo sia anche in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (6x + 2) = 2$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x)$, $f(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

Pertanto, non volendo le ipotesi del teorema di Lagrange, non possiamo applicare la tesi. Il nostro esercizio si conclude qui;

$$b) f(x) = \sqrt[3]{x} \quad I = [0, 27]$$

Come di consueto, ammassiamoci che $f(x)$ soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange:

- $f(x)$ deve essere continua in I . Essendo continua in $\mathbb{R}$, lo è anche in $I \in \mathbb{R}$;
- $f(x)$ deve essere derivabile in $]0, 27[$. Dato $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, il suo dominio è $D_{f'} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. L'unico punto in cui $f(x)$ non è derivabile è $x=0$; perciò $f(x)$ è derivabile in $]0, 27[$, dato che tale intervallo esclude già $x=0$.

Essendo $f(x)$ continua in I e derivabile in $]0, 27[$, possiamo applicare la tesi del teorema di Lagrange:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Calcoliamo anzitutto $f(b)$ e $f(c)$ e otteniamo poi il valore dell'espressione a primo membro dell'equazione precedente:

$$f(b) = 0$$

$$f(27) = 3$$

$$f'(x_0) = \frac{3-0}{27-0} = \frac{1}{9}$$

Ora poniamo il risultato ottenuto uguale alla derivata prima di $f(x)$ e calcoliamo il valore di x per cui vale il teorema di Lagrange:

$$3 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{9} \cdot 3 \sqrt[3]{x^2} \cdot 3$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 3$$

$$x^2 = 27$$

$$x = \pm \sqrt{27}$$

Il valore di x che accettiamo è $+\sqrt{27}$ perché appartiene a I .